 ediciones sm

Cálculo de tasas de variación y derivadas

1. Considera la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 5$. Halla los puntos de su gráfica en los que la recta tangente es paralela al eje OX.

2. Halla los valores de x para los que la pendiente de la curva $y = 2x^2 - 6x + 3$ se encuentra comprendida entre 2 y 6.

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, calcula si es posible $f'(1)$.

4. ¿Para qué valor de x la recta tangente a la curva $y = Lx$ pasa por el origen de coordenadas?

5. Un determinado agente químico está siendo utilizado para combatir una plaga de insectos de unos 36 000 individuos. A los t días de tratamiento la población de insectos resultante es de $p(t) = 36\,000 - 250t^2$ individuos.

a) ¿Cuántos días tarda el insecticida en acabar con la plaga?

b) Halla la tasa de variación de la población de insectos entre el cuarto y el séptimo día.

c) Halla la velocidad media de eliminación de los insectos en dicho período.

d) ¿Cuál es la velocidad media de eliminación de insectos durante el tiempo que dura la plaga?

e) ¿Cuál es la velocidad instantánea de eliminación de insectos al octavo día?

f) ¿A partir de qué día mueren más de 5 000 insectos diarios?

6. La distancia de un avión a la pista de despegue, medida en kilómetros, viene dada por la función $d(t) = \frac{t^3}{2\,000} + 15t$, siendo t el tiempo, en minutos, transcurrido desde que despega.

a) ¿Cuántos kilómetros recorre el avión en una hora?

b) ¿Qué velocidad lleva el avión a la media hora del despegue? Exprésala en km/h.

c) ¿Qué aceleración lleva el avión a los 5 minutos de despegar?

7. El número de bacterias, en miles, de un cierto cultivo varía en función del tiempo según la función $P(t) = 5e^{\frac{t}{30}}$, donde t viene expresado en minutos.

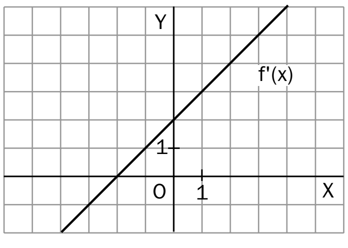
a) ¿Cuál es el número de bacterias en el instante inicial?

b) ¿Cuántas bacterias tendrá el cultivo pasada una hora?

c) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la población de bacterias a los quince minutos?

8. El movimiento de un péndulo sigue la ecuación $s(t) = 20 \text{ sen } 5t$. Justifica que en cada instante el espacio recorrido es proporcional a la aceleración que lleva el péndulo hallando el factor de proporcionalidad. (El problema tiene sentido siempre que $\text{sen } 5t \neq 0$.)

9. La gráfica adjunta corresponde a la función derivada de una función f(x). ¿Cuál es esta función si sabemos que pasa por el punto (0, 5)?



SOLUCIONES

1. Si la tangente es paralela al eje 0X, debe tener la misma pendiente que éste, es decir, pendiente cero.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x - 60 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5, x = -2$

Solución: (5, f(5)) y (−2, f(−2)), es decir, (5, −270) y (−2, 73).

2. $2 < y' < 6 \Leftrightarrow 2 < 4x - 6 < 6 \Leftrightarrow$
$2 < 4x - 6 \quad y \quad 4x - 6 < 6 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

3. Se trata de una función a trozos y el punto en el que hay que estudiar si existe o no la derivada es el punto de unión; por tanto, hay que recurrir a la definición de derivada.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

Calculando los límites laterales se obtienen las derivadas laterales de la función en el punto:

$$f'(1)^- = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

$$f'(1)^+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

Estas derivadas laterales se pueden calcular directamente a partir de las funciones parciales de f.

Si coinciden, su valor es la derivada de la función en el punto; en otro caso no existe la derivada de la función en el punto.

$f'(1)^- = 2(1) = 2 = f'(1)^+$; por tanto, existe la derivada de f en $x = 1$ y vale 2.

4. La recta tangente a la curva en el punto (a, f(a)), con $a > 0$ por tratarse de $y = Lx$, tiene como ecuación:

$$y - La = \frac{1}{a}(x - a)$$

Pasa por (0, 0), luego $La = 1 \Rightarrow a = e$.

Solución: $x = e$.

5. a) $P(t) = 0 \Leftrightarrow 36\,000 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 12$

Se desprecia $t = -12$, pues t indica los días de tratamiento.

b) $P(7) - P(4) = (23\,750 - 32\,000)$ insectos $=$
$= -8\,250$ insectos.

La plaga de insectos ha disminuido en 8 250 individuos.

c) $\dfrac{P(7) - P(4)}{7 - 4} = -2\,750$ insectos/día

Se eliminan de media 2 750 insectos diarios.

d) $\dfrac{P(12) - P(0)}{12 - 0} = \dfrac{0 - 36\,000}{12} =$
$= -3\,000$ insectos/día

Se eliminan de media 3 000 insectos diarios.

e) $P'(t) = -500t \Rightarrow P'(8) = -4\,000$

El octavo día son eliminados 4 000 insectos.

f) $|P'(t)| > 5\,000 \Leftrightarrow |-500t| > 5\,000 \Leftrightarrow$
$500t > 5\,000 \Leftrightarrow t > 10$

Solución: A partir del undécimo día de tratamiento.

6. a) $d(60) = 1\,008$ km

b) $d'(t) = \dfrac{3t^2}{2\,000} + 15$

$d'(30) = 16{,}35$ km/minuto $= 981$ km/h

c) $d''(t) = \dfrac{6t}{2\,000} \Rightarrow d''(5) = \dfrac{3}{200}$ km/minuto^2

7. a) $P(0) = 5$

En el instante inicial hay 5 000 bacterias.

b) $P(60) = 5e^2$

Transcurrida una hora hay 36 945 bacterias.

c) $P'(t) = \dfrac{t}{6} e^{\frac{1}{30}} \Rightarrow P'(15) = 0{,}27$ bacterias/minuto

8. La aceleración del péndulo es:

$s''(t) = (100 \cos 5t)' = -500 \text{ sen } 5t$

$\dfrac{s(t)}{s''(t)} = \dfrac{25 \text{ sen } 5t}{500 \text{ sen } 5t} = -\dfrac{1}{25}$, luego queda demostrado que el espacio es proporcional a la aceleración, siendo $-\dfrac{1}{25}$ el factor de proporcionalidad.

Nótese que el cociente sólo tiene sentido cuando $\text{sen } 5t \neq 0$.

9. Por ser f′ (x) lineal, f(x) será de la forma:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, y por tanto $f'(x) = 2ax + b$

Se sabe que f pasa por el punto (0, 5), y a la vista de la gráfica se tiene que f′ pasa por el punto (0, 0).

Por tanto: $f(0) = 5 = c \quad y \quad f'(0) = b = 0$

Solución: $f(x) = x^2 + 5$.